

МЕХАНИКА

ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ
В УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕР.Ю.АМЕНЗАДЕ, Э.Т.КИЯСБЕЙЛИ, Г.М.САЛМАНОВА
Бакинский Государственный Университет

В статье рассматривается осесимметричное распространение волн малой амплитуды в двухфазной баротропной пузырьковой жидкости, заключенной в упругую цилиндрическую оболочку. Используется гипотеза плоских сечений Кирхгофа-Лява. В длинноволновом приближении, для численной реализации, в качестве примера принята смесь в виде воды, при наличии в ней небольших добавок воздуха. Выявлено влияние объемного содержания пузырьков на волновые характеристики.

Введение: Проблема распространения волн в деформируемых оболочках с протекающей в полости жидкостью представляет интерес в нескольких аспектах. В теоретическом аспекте это задача математической физики, а в прикладном – необходимый этап расчета системы, подверженной динамическому воздействию.

Хотя основные идеи и принципы анализа движение жидкости в деформируемых оболочках известны [1–4], очевидно, что механизмы ряда явлений, например, многофазности жидкости, изучены совершенно недостаточно.

В этой связи в настоящей работе приведены результаты исследований закономерностей распространения прогрессивных волн в системе: полубесконечная незакрепленная цилиндрическая тонкостенная упругая оболочка кругового поперечного сечения и сжимаемая идеальная жидкость, которая заполняет полость оболочки. При этом жидкость считается двухфазной, баротропной, пузырьковой. Рассматривается линеаризованная постановка задачи для осесимметричных волн, распространяющихся вдоль оси оболочки в ее положительном направлении. В указанном случае малых возмущений будем использовать общие координаты для упругой оболочки и жидкости, которые совпадают с эйлеровыми и лагранжевыми координатами.

Для изотропного случая применяются уравнения, полученные согласно гипотезе Кирхгофа-Лява. Это обстоятельство позволяет рассматривать только длинноволновое приближение.

1. Основные соотношения и постановка задачи. В систему уравнений, описывающих распространение волн в деформируемой оболочке, содержащей жидкость, входят уравнения движения оболочки и жидкости, ограниченность искомых функций, а также непрерывность компонент скоростей на границе контакта жидкости и оболочки.

Пусть в невозмущенном состоянии дана круговая оболочка радиуса R и толщиной $2h$. В цилиндрической системе координат (x, θ, r) при рассмотрении

осесимметричных возмущений (этим условием исключаются крутильные волны) уравнения движения оболочки, на которую действует гидродинамическое напряжение $(0,0,q)$ со стороны жидкости, запишем в виде [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\rho_*}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ -\frac{w}{R} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{R(1-\nu^2)}{2Eh} q &= \frac{\rho_*}{E} R(1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\{u(x,t), 0, w(x,t)\}$ - перемещения точки в стенке оболочки, ρ_* - плотность материала, E - модуль упругости Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Течение смеси будем считать потенциальным. Тогда для определения потенциала скорости $\varphi(x,r,t)$ имеем уравнение [5]

$$\Delta \varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ - оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. При известном потенциале φ гидродинамическое напряжение и вектор скорости течения жидкости определяются как

$$q = -\rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi \quad (1.4)$$

В уравнениях (1.2) и (1.3), согласно [6]*, квадрат скорости звука a^2 и плотность газожидкостной среды ρ_f записываются посредством следующих формул:

$$a^2 = \frac{1}{\alpha_{20}(1-\alpha_{20})} \left(\frac{\rho_{10}^0}{\rho_{10}^0 - \rho_{20}^0} \right)^2 \frac{p_0}{\rho_{10}^0}, \quad (1.5)$$

$$\rho_f = (1-\alpha_{20}) \rho_{10}^0 + \alpha_{20} \rho_{20}^0. \quad (1.6)$$

В которых α_{20} - объемное содержание пузырьков, ρ_{10}^0 и ρ_{20}^0 - истинные плотности жидкости и газа, соответственно, p_0 - статическое давление.

* здесь приводятся необходимые допущения для математического описания смеси в рамках механики сплошной среды.

Для завершения постановки задачи необходимы контактные условия, связывающие движения жидкости и оболочки. Эти условия зависят от принятой гипотезы о толщине стенки оболочки и модели жидкости. Здесь на поверхности оболочки должно быть выполнено кинематическое условие непроницаемости, которое, следуя (1.4) и гипотезе о нейтральной плавучести [6], может быть записано в форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=R}. \quad (1.7)$$

Теперь задача полностью поставлена.

2. Решение уравнения гидродинамики. В дальнейшем будем предполагать, что все искомые функции пропорциональны временному множителю $\exp(i\omega t)$, где ω - круговая частота, а $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. Таким образом, требуется найти решение уравнения (1.2) для случая, когда

$$\varphi = \bar{\varphi}(x, r) \exp(i\omega t) \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.2), получим:

$$\Delta \bar{\varphi} + \frac{\omega^2}{a^2} \bar{\varphi} = 0. \quad (2.2)$$

Согласно методу Фурье, будем сначала искать частные решения уравнения (2.2), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$\bar{\varphi}(x, r) = \varphi_1(x) \varphi_2(r). \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в уравнение (2.2), будем иметь:

$$\varphi_1''(x) \varphi_2(r) + \varphi_1(x) \varphi_2''(r) + \frac{1}{r} \varphi_1(x) \varphi_2'(r) + \frac{\omega^2}{a^2} \varphi_1(x) \varphi_2(r) = 0$$

или

$$\frac{\varphi_2''(r)}{\varphi_2(r)} + \frac{1}{r} \frac{\varphi_2'(r)}{\varphi_2(r)} = - \frac{\varphi_1''(x)}{\varphi_1(x)} - \frac{\omega^2}{a^2}. \quad (2.4)$$

Последнее равенство, левая часть которого зависит только от r , а правая - только от x , возможно лишь в том случае, если общая величина отношений (2.4) будет постоянной. Обозначим эту постоянную через λ^2 . Тогда из равенства (2.4) получим два обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_2''(r) + \frac{1}{r} \varphi_2'(r) - \lambda^2 \varphi_2(r) = 0, \quad (2.5)$$

$$\varphi_1''(x) + \left(\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)\varphi_1(x) = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) сводится к уравнению Бесселя. Запишем его решение, удовлетворяющее условию ограниченности при $r = 0$. Это решение можно записать в виде

$$\varphi_2 = A_2 J_0(i\lambda r),$$

где A_2 - постоянная интегрирования, а $J_0(i\lambda r)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Интегрируя теперь уравнение (2.6) и оставляя в рассмотрении волну, бегущую в положительном направлении оси x , получим:

$$\varphi_1 = A_1 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} x\right\}.$$

Таким образом, потенциал φ имеет вид:

$$\varphi = A J_0(i\lambda r) \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} x\right\} \exp(i\omega t). \quad (2.7)$$

3. Дисперсионное уравнение. Представим упругие перемещения следующим образом:

$$u = u_0 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} x\right\} \exp(i\omega t), \quad (3.1)$$

$$w = w_0 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} x\right\} \exp(i\omega t), \quad (3.2)$$

где u_0 и w_0 - неизвестные, вообще говоря комплексные постоянные. Построение потенциала φ будет завершено, если воспользоваться формулами (2.7) и (3.2) в контактном условии (1.7). Отсюда непосредственно вытекает

$$A = -\frac{\omega}{\lambda J_1(i\lambda R)} w_0.$$

Подставив полученное выражение в формулу (2.7), находим:

$$\varphi = -\frac{\omega}{\lambda} \frac{J_0(i\lambda r)}{J_1(i\lambda R)} w_0 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} x\right\} \exp(i\omega t). \quad (3.3)$$

Пользуясь формулой (1.3), определяем напряжение q

$$q = i \frac{\omega^2 \rho_f}{\lambda} \frac{J_0(i \lambda R)}{J_1(i \lambda R)} w_0 \exp \left\{ -i \sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} x \right\} \exp(i \omega t). \quad (3.4)$$

Внося теперь представления (3.1), (3.2) и (3.4) в уравнения движения оболочки (1.1) и произведя очевидные преобразования для указанных постоянных, приходим к системе двух однородных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \left\{ -\left(\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) + \frac{\rho \xi}{2c_0^2} (1 - \nu^2) \omega^2 \right\} u_0 - \frac{i \nu}{R} \sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} w_0 = 0, \\ \left\{ -\frac{1}{R} + \frac{(1 - \nu^2) h \rho}{2c_0^2} k(\lambda) \omega^2 \right\} w_0 + i \nu \sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} u_0 = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь, для краткости записи, введены следующие обозначения

$$c_0^2 = \frac{E}{2\rho_f} \xi, \quad k(\lambda) = 1 - \frac{1}{2h\rho} \frac{J_0(i \lambda R)}{J_1(i \lambda R)},$$

где

$$\rho = \frac{\rho_*}{\rho_f}, \quad \xi = \frac{h}{R}.$$

Два уравнения (3.5) имеют нетривиальное решение только в том случае, если определитель системы (3.5) обращается в нуль. Следствием этого является

$$m_1 \omega^4 - m_2 \omega^2 + m_3 = 0$$

при

$$\begin{aligned} m_1 &= k(\lambda) \frac{(1 - \nu^2) h \rho}{2c_0^2} \left(\frac{1 - \nu^2}{2c_0^2} \rho \xi - \frac{1}{a^2} \right), \\ m_2 &= \frac{1 - \nu^2}{R} \left\{ \frac{\rho}{2c_0^2} (k(\lambda) h R \lambda^2 + \xi) - \frac{1}{a^2} \right\}, \\ m_3 &= \frac{1 - \nu^2}{R} \lambda^2. \end{aligned}$$

Отсюда величина ω^2 удовлетворяет квадратному уравнению

$$\omega^2 = \frac{m_2}{2m_1} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m_1 m_3}{m_2^2}} \right\}. \quad (3.6)$$

Ограничимся случаем длинноволнового приближения, когда $\lambda \ll 1$. Для этого воспользуемся асимптотическим представлением для функции Бесселя

$$J_\alpha(i\lambda R) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = 0 \\ \frac{i\lambda R}{2} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

В результате для функции $k(\lambda)$ получаем следующее соотношение

$$k(\lambda) = 1 + \frac{1}{Rh\rho\lambda^2},$$

и коэффициенты m_1 , m_2 и m_3 принимают вид:

$$\begin{aligned} m_1 &= \left(1 + \frac{1}{Rh\rho\lambda^2} \right) \frac{(1-\nu^2)h\rho}{2c_0^2} \left(\frac{1-\nu^2}{2c_0^2} \rho\xi - \frac{1}{a^2} \right), \\ m_2 &= \frac{1-\nu^2}{R} \left\{ \frac{\rho}{2c_0^2} \left(\left[1 + \frac{1}{Rh\rho\lambda^2} \right] hR\lambda^2 + \xi \right) - \frac{1}{a^2} \right\}, \\ m_3 &= \frac{1-\nu^2}{R} \lambda^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Попытаемся решить дисперсионное уравнение (3.6), следуя соответствующим задаче характерным опытными данным. Применительно к оболочке из резины имеем:

$$E = 4 \cdot 10^6 \frac{\partial H}{\text{см}^2}, \quad R = 2 \text{ см}, \quad h = 0,2 \text{ см}, \quad (\xi = 10^{-1}), \quad \nu = 0,3.$$

Рассмотрим смесь, состоящую из воды, содержащей небольшие добавки пузырьков воздуха $\alpha_{20} = \{10^{-2} \div 10^{-1}\}$ (случай интересный с точки зрения практики). Такая схематизация весьма важна, т.к. вода определяющим образом влияет на протекание многих физико-химических, биологических и технологических процессов. С другой стороны в ней всегда есть примеси, в частности, пузырьки воздуха. Небезынтересно заметить, что кровь большей частью также состоит из воды. Далее примем, что

$$\rho_{10}^0 = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \rho_{20}^0 = 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Тогда формулы (1.5) и (1.6) с достаточной точностью перепишем в виде:

$$a^2 \approx \frac{1}{\alpha_{20}(1-\alpha_{20})} \frac{p_0}{\rho_{10}^0}, \quad \rho_f \approx (1-\alpha_{20}) \rho_{10}^0. \quad (3.8)$$

Здесь a - равновесная скорость звука в смеси, величина которой может быть значительно меньше не только скорости звука в воде, но и скорости звука в воздухе. Для рассматриваемой смеси при $p_0 = 10^6 \frac{\partial n}{\partial m^2}$ [6] $a \approx 10^4 \frac{см}{сек}$ при

$$\alpha_{20} = 10^{-2}, \quad a \approx 4,47 \cdot 10^3 \frac{см}{сек} \quad \text{при} \quad \alpha_{20} = 5 \cdot 10^{-2} \quad \text{и} \quad a \approx 3,16 \cdot 10^3 \frac{см}{сек} \quad \text{при}$$

$\alpha_{20} = 10^{-1}$, (для сравнения скорость звука в воде $150000 \frac{см}{сек}$, а в воздухе $34000 \frac{см}{сек}$). Как видно из второй формулы (3.8) плотность пузырьковой

жидкости ($\rho_f \approx \rho_{10}^0$) практически не меняется, в то время как скорость звука в ней

$$a \approx \sqrt{\frac{p_0}{\alpha_{20} \rho_{10}^0}}$$

меняется существенно – среда обладает сильной физической

нелинейностью. Применительно к c_0 найдем, что $c_0 \approx 447 \frac{см}{сек}$. Следуя

приведенным оценкам, непосредственным вычислением можно показать, что $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$. Таким образом, дисперсионное уравнение (3.6) характеризует распространение продольных волн в смеси и оболочке. Большой корень ω_2 характеризует частоту волны в оболочке, а меньший – ω_1 в смеси.

4. Численный эксперимент и выводы. Применительно к значениям приведенных выше параметров, приведем ряд численных результатов. На рисунке 1 даны зависимости частоты ω_2 для различных значений λ . Отсюда можно заключить, что с возрастанием α_{20} частота ω_2 увеличивается более, чем на 11%.

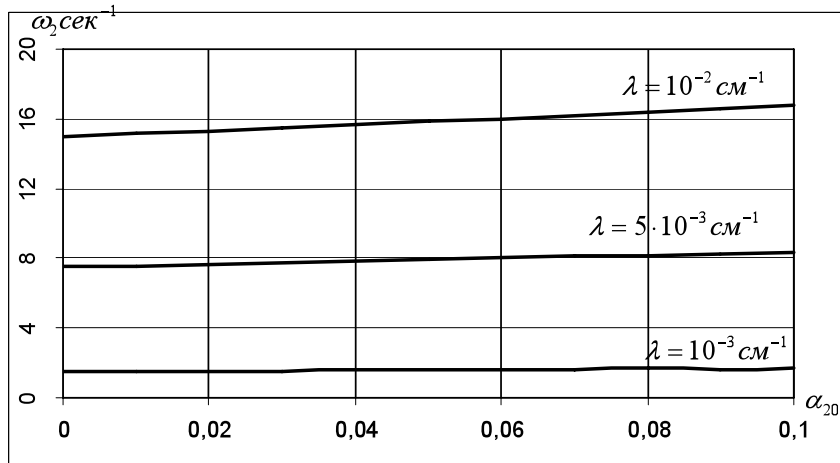


Рис.1.

Аналогичная зависимость для ω_1 увеличивается незначительно. Так, например, когда $\lambda = 10^{-2} \text{ см}^{-1}$ $\omega_1 \approx 6,29 \text{ сек}^{-1}$ при $\alpha_{20} = 0$, и $\omega_1 \approx 6,59 \text{ сек}^{-1}$ при $\alpha_{20} = 10^{-1}$

(это составляет порядка 4,8%). Аналогичная картина наблюдается при $\lambda = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ и $\lambda = 10^{-3} \text{ см}^{-1}$.

Таблица 1

ρ	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\omega_2 \text{ сек}^{-1}$	21,54	19,61	18,31	16,95	15,97	15,15

Из таблицы 1 при фиксированных $\lambda = 10^{-2} \text{ см}^{-1}$, $\rho_{10}^0 = 1 - \frac{c}{\text{см}^3}$ и $\alpha_{20} = 10^{-2}$ видно, что ω_2 уменьшается с увеличением ρ (29,6%), а ω_1 практически не меняется и равно приблизительно $6,3 \text{ сек}^{-1}$.

В заключение необходимо заметить, что при фиксированных λ для принятого диапазона изменения α_{20} частота в оболочке изменяется более существенно, чем в смеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979, 320с.
2. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998, 349с.
3. Лайтфут Э. Явление переноса в живых системах. М.: Мир, 1977, 320с.
4. Педли Т. Гидродинамика крупных сосудов. М.: Мир, 1983, 400с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976, т.1, 535с.
6. Губайдуллин А.А., Ивандяев А.И., Нигматуллин Р.И., Хабеев Н.С. Волны в жидкостях с пузырьками // Итоги науки и техники. Сер., механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, вып. 17, 1982, 247с.

ELASTİK ÖRTÜKDƏ QABARCIQLI MAYENİN PULSVARI AXINI

R.Y.ƏMƏNZADƏ, E.T.QİYASBƏYLİ, G.M.SALMANOVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalədə elastik nazıqdivarlı silindrik örtükdə ikifazalı, barotrop, qabarcıqlı mayedəki kiçik amplitudlu dalğaların simmetrik yayılmasına baxılır. Müstəvi axın üçün Kirxqof-Lyav hipotezindən istifadə olunur. Uzundalğalı halda ədədi hesablamalar üçün nümunə kimi tərkibində az miqdarda hava qarışığı olan su götürülür. Qabarcıqların həcmi tutumunun dalğanın xarakteristikasına təsiri araşdırılır.

PULSATING FLOW OF BUBBLE LIQUID IN THE ELASTIC COVER

R.Yu.AMENZADEH, E.T.QIYASBEYLI, G.M.SALMANOVA

SUMMARY

The asyymmetrical expansion of waves of small amplitude in two-phased barotrop bubble-liquid in the elastic thin-walled cylindrical cover is viewed in the article. Kirhgaf-Lyav hypothesis is used for the flat-flow. The water with small quantity of oil mixture inside is taken as an example for numerical calculations. It's defined that the big capacity of bubbles has an effect on the wave characteristics.